

Roll No. ....

[ 2 ]

D-3289

**D-3289**

**B. A. (Part III) EXAMINATION, 2020**

MATHEMATICS

Paper First

(Analysis)

Time : Three Hours ]

[ Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any two parts of each question. All questions carry equal marks.

**इकाई—1**

**(UNIT—1)**

1. (अ) फलन  $f(x) = x \cos x$  के लिए अन्तराल  $(-\pi, \pi)$  में फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find the Fourier series of the function  $f(x) = x \cos x$  in the interval  $(-\pi, \pi)$ .

- (ब) दर्शाइये कि फलन :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(0, 0)$  पर सतत् तो है पर अवकलनीय नहीं है।

**(B-10) P. T. O.**

Show that the function :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is continuous but not differentiable at  $(0, 0)$ .

- (स) दो चरों के फलन के लिए स्वार्ज प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Schwarz theorem for function of two variables.

**इकाई—2**

**(UNIT—2)**

2. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संतत फलन रीमान समाकलनीय होता है।

Prove that every continuous function is Riemann Integral.

- (ब) समाकलन गणित का मूलभूत प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Fundamental theorem of Integral Calculus.

- (स) समाकल :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 (1-x)^{\frac{1}{3}}}$$

के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test for the convergence of integral :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 (1-x)^{\frac{1}{3}}}$$

**(B-10)**

[ 3 ]

D-3289

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) दर्शाइए कि दो सम्मिश्र संख्याओं के योग का मापांक सदैव उनके मापांकों के योग से छोटा या बराबर होता है।

Show that the modulus of sum of two complex numbers is always less than or equal to the sum of their moduli.

- (ब) दर्शाइये कि रूपान्तरण  $w = \frac{2z+3}{z-4}$  वृत्त  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  को सरल रेखा  $4u + 3 = 0$  प्रतिचित्रित करता है।

Show that the transformation  $w = \frac{2z+3}{z-4}$  maps circle  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  into straight line  $4u + 3 = 0$ .

- (स) यदि  $w = f(z) = u + iv$  विश्लेषिक फलन है तथा  $u - v = e^x \{\cos y - \sin y\}$ , तब  $f(z)$  को  $z$  के पदों में ज्ञात कीजिए।

If  $w = f(z) = u + iv$  is analytic function and  $u - v = e^x \{\cos y - \sin y\}$ , then find  $f(z)$  in terms of  $z$ .

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि  $\sqrt{3}$  एक अपरिमेय संख्या है।

Prove that  $\sqrt{3}$  is an irrational number.

- (ब) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक विवृत गोलक एक विवृत समुच्चय होता है।

Prove that in a metric space every open sphere is an open set.

(B-10) P. T. O.

[ 4 ]

D-3289

- (स) माना कि  $(X, d)$  एक दूरीक समष्टि है तथा  $d^*$  निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X$$

दर्शाइए कि  $d^*$ ,  $X$  पर एक दूरीक है।

Let  $(X, d)$  be a metric space and let  $d^*$  be defined by :

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X$$

then show that  $d^*$  is metric on  $X$ .

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक द्वितीय गणनीय दूरीक समष्टि गणनीय सघन होता है।

Prove that every second countable metric space is separable.

- (ब) सिद्ध कीजिए कि एक संबद्ध समुच्चय का सतत् प्रतिबिंब संबद्ध होता है।

Prove that a continuous image of a connected set is connected.

- (स) विस्तार प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Extension theorem.

D-3289

(B-10)